**Вопрос 1. Операции над множествами. Логические символы.**

**Множество** - совокупность некоторых различимых объектов.

***N*** - натуральные числа, ***Z***- целые числа, ***Q*** - рациональные числа,  ***R*** *-* вещественные числа, **[*a,b*]**– отрезок, **(*a, b*)** – интервал, **(*a,b*],[*a,b*)** – полуинтервалы.

**Основные операции над множествами:**

Элемент принадлежит множеству ***x  E****,* элемент непринадлежитмножеству***x  E****.*

*Подмножество* ***A ⊂ E****.*

∅- пустое множество ** *E*⊆*E****.*

Обозначение множества *перечислением* - **{*a, b, c*}**.

Обозначение множества *указанием характеризующего свойства* – {*x*: *x* удовлетворяет свойству *P*}.

Пример: ***N=*{*x*∈*Z*: *x* > 0}; [*a,b*]={*x: a*≤*x*≤*b*}**

*Дополнение множества A (или разность двух множеств)*

***E*\*A=*{*x*∈*E*: *x*∉*A*}**

*Пересечение двух множеств*  ***A*∩*B =*{*x*: *x*∈*A и x*∈*B*}**

Если два множества не пересекаются, то это можно записать в виде ***A*∩*B=*∅***.*

*Объединение* *двух множеств*  ***A*∪*B =*{*x*: *x∈A или x*∈*B*}**

*Произведение множеств* ***A*×*B =*{(*x,y*): *x*∈*A и y*∈*B*}***.*

**Логические символы:**

Вместо слов «существует, найдется, имеется» употребляем символ ∃ (Exist – “существует”).

Вместо слов «любой, каждый, произвольный» употребляем символ ∀ (Any – “любой”).

**⇒** *- следует*

- *равносильность*

**:=** *- равенство по определению*

**Вопрос 2. Понятие отображения, функции. Определение отображения сюръективного, инъективного, биективного, обратного. Композиция функций.**

**X, Y**. Определяют соответствие при котором **x∈X** соответствует единственный элемент **y∈Y** называется заданной **функцией** (определенной на множестве значений).

Оно называется также **отображение** **Х** в множестве **Y**, такая функция обозначается:

**Y=f(x), x∈X**

**f: X→Y; x→y, x∈X, y∈Y**

Отображение **f: X→Y** называется **сюръективным**, если каждый элемент множества **Y** является образом хотя бы одного элемента множества **X**, то есть **∀y∈Y ∃ x∈X: y=f(x)**.

Отображение **f: X→Y** называется **инъективным**, если для **∀x1,x2∈X** имеем

**(f(x1)= f(x2)) ** (x1=x2)** т.е. различные элементы имеют различные образы.

**Биекция** — это отображение, которое является одновременно и сюръективным и инъективным. При биективном отображении каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого множества, при этом, определено **обратное отображение**, которое обладает тем же свойством. Поэтому биективное отображение называют ещё взаимно-однозначным отображением (соответствием).

Если **f: X→Y** и **g: Y→Z** две функции то **F: X→Z** называется **композицией функций** **(F(x)=g(f(x)))** **f** и **g** или сложной функцией и обозначается **g○f. (g○f)(x):=g(f(x)), ∀x∈X**.

**Вопрос 3. Аксиоматическое определение действительных чисел (свойства сложения и умножения, упорядоченность, плотность, непрерывность).**

Множество называется множеством **действительных чисел**, а его элементы — действительными числами, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:

1. **Операции сложение** (для любой пары действительных чисел):
   1. Коммутативность сложения: ***a + b = b + a***
   2. Ассоциативность сложения: ***a +* ( *b + c* ) = ( *a + b* ) *+ c***
   3. Существование нуля: ***∃0(существует элемент называемый нулем)*** ***∀a∈R : a + 0 = a***
   4. Существование противоположного элемента: ***∀a ∃* *противоположный*** ***-******a : a + (-a) = 0***
2. **Операции умножения** (для любой пары действительных чисел):

2.1) Коммутативность умножения: ***a·b = b·a***

2.2) Ассоциативность умножения: ***a·*(*b·c*) *=* (*a·b*)*·c***

2.3) Существование единицы: ***существует элемент обозначаемый 1****,* **∀*a*∈*R :* 1·*a = a***

2.4) Существование обратного элемента: ***∀a∈R a≠0 ∃a-1(обратный): a·a -1 = 1***

3) **Операции сложения и умножения**:

3.1) ***(a + b)·c = a·c + b·c*** ( дистрибутивность )

4) **Упорядоченность**:

4.1) Транзитивность: ***a < b, b < c ⇒ a < c***

4.2) Связь сложения и порядка: если ***a<b ∀c∈R: a+c<b+с***

4.3) Связь умножения и порядка: если ***a>b, c>0: a·c>b·c***

4.4) Антисимметричность: если ***a≤b, b≤a: a=b***

Из 4.2 и 4.3 вытекает важное свойство **плотность действительных чисел.** Для любых двух действительных чисел **a, b** при **a<b** существует число **с,** такое что a<c<b.

5) **Непрерывность**:

5.1) Пусть **X,Y**-непустые множества действительных чисел такие, что **x∈X, y∈Y, x ≤ y** тогда **∃*a*∈*R*** такое что*:* ***x ≤ a ≤ y***

**Вопрос 4. Числа натуральные, рациональные, иррациональные, алгебраические, трансцендентные. Принцип математической индукции.**

**Натуральные числа** - это числа, которые используются для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов.

**Рациональные числа** - число, представляемое несократимой обыкновенной дробью ***m/n***, где числитель ***m*** — целое число, а знаменатель ***n*** — натуральное число.

**Иррациональные числа** - это вещественное число, которое не является рациональным, то есть которое не может быть представленным в виде дроби ***m/n***, где ***m*** — целое число, ***n*** — натуральное число.

**Алгебраические числа -** называются корни алгебраических уравнений с целочисленными коэффициентами.

**Трансцендентные числа -** число, которое не может быть корнем многочлена с целыми коэффициентами (число ***π***; основание натуральных логарифмов ***е***; десятичный логарифм любого целого числа, кроме чисел вида ***10n***).

**Принцип математической индукции:** Множество ***A⊂ N*** , если выполняются свойства:

1. ***1∈А***
2. ***n∈А (n∈N)  n+1∈А, тогда A=N***

Док-во: Последовательно убеждаемся, что ***2∈А:=1+1, 3∈А:=2+1***, …, следовательно ***N⊂ A****, отсюда и из* ***A⊂N⇒* A=N**.

**Вопрос 5. Расширенная числовая прямая . Промежутки, ε-окрестности и ε-полуокрестности точек из .**

**Расширенная числовая прямая** (читается «эр с чертой») — множество вещественных чисел , дополненное двумя элементами: (положительная бесконечность ***+∞***) и (отрицательная бесконечность ***-∞***), то есть **=R∪{-∞}∪{+∞}**.

**Промежуток** - множество вещественных чисел, обладающее тем свойством, что вместе с любыми двумя числами содержит любое число, лежащее между ними.

**ε-окрестности** - называется множество точек, удаленных от ***x0*** не более чем на ***ε***, т.е. ***U(x0,ε) :=(x0-ε; x0+ε).***

**ε-полуокрестности –** называется множество точек, удаленных от ***x0*** либо слева, либо справа не более чем на ***ε***, т.е. ***(x0-ε, x0]*** либо ***[x0, x0+ε)***.

**Вопрос 6. Ограниченные и неограниченные множества на R.**

*Множество* ***E*** *называется* ***ограниченным сверху(свизу)****, если* ***∃b(∃a) ∀x∈E : x ≤ b(x ≥ a)****, при этом* ***a*** *ограничивает* ***х*** *снизу, а число* ***b*** *сверху.*

*Множество* ***E*** *называется* ***ограниченным****, если оно ограниченно и сверху и снизу.*

*Множество* ***Е*** *называется* ***неограниченным****, если неограниченно ни сверху ни снизу.*

**Вопрос 7. Точная верхняя и точная нижняя грани. Теорема о существовании точной верхней и нижней грани.**

***Точная верхняя грань*** *–* ***b = sup E*** *– называется наименьший элемент, который равен или больше всех элементов множества. Это число, удовлетворяющее двум свойствам:*

1) *(b - верхняя грань)* ***∀x∈E : x≤b****.*

2) (*нет меньшей*) ***∀ε>0 ∃ x∈E: x > b-ε***.

***Точная нижняя грань*** *–* ***а = inf E*** *– называется наибольший элемент, который равен или меньше всех элементов множества. Это число, удовлетворяющее двум свойствам:*

1) *(b - нижняя грань)* ***∀x∈E : x≥а****.*

2) (*нет меньшей*) ***∀ε>0 ∃ x∈E: x < а+ε***.

***Теорема 1.*** *У непустого, ограниченного сверху множества существует точная верхняя грань.*

*Доказательство:* Пусть ***А*** – не пустое ограниченное сверху множество. Рассмотрим непустое ***В***, элементами которого являются все числа, ограничивающие А сверху, тогда ***a≤b ∀а∈А***, ***∀b∈B***. Из аксиомы непрерывности следует, что ***∃c∈R: a≤c≤b*** (1), ***∀а∈А, ∀b∈B***. Покажем, что ***supA=c***. Первое условие следует из левой части (1). Покажем, что второе тоже выполнено. Пусть ***с’<c***, тогда ***c’∈B***, так как для ***∀b∈B*** выполнена правая часть (1), следовательно ***c’*** не ограничивает ***А*** сверху, следовательно ***с = sup A***.

**Вопрос 8. Принцип Архимеда.**

***Теорема 1.*** *Каково бы ни было число* ***a∈R*** *существует натуральное число* ***п∈N: n>a.***

*Доказательство:* Предположим противное: найдется такое число ***∃а***, что для всех ***п∈N*** выполняется неравенство***n≤a***, следовательно ***а*** ограничивает ***N*** сверху по теореме §6, у множества ***N*** ограниченного сверху существует точная верхняя грань ***β = sup N.*** Тогда по определению верхней грани для числа ***β’:=β-1, ∃ п∈N: п> β-1.*** Но тогда ***п+1> β,*** что противоречит тому, что ***β = sup N.***

**Вопрос 9. Система вложенных отрезков и теорема о ее пересечении.**

**Система вложенных отрезков –** система отрезков **[a1,b1], [a2,b2], [an,bn], an∈R, bn∈R, n=1,2…** называется системой вложенных отрезков если **a1≤a2≤an, b1≥b2≥bn, [a1,b1]⊃[a2,b2]⊃[an,bn].**

***Теорема 1.*** *Всякая система вложенных отрезков имеет непустое пересечение.*

*Доказательство:* Обозначим через **A** множество всех левых концов **A={an}**, a **В** всех правых **B={bn},** для любых номеров **m,n∈N** выполняется неравенство **am≤bn**. По свойству непрерывности действительных чисел существует число **ξ(кси), am≤ ξ ≤bn, an≤ ξ ≤bn, n=1,2,…** и означает что точка **ξ** принадлежит ко всем отрезкам **[an,bn].**

**Вопрос 10. Теорема о вложенных отрезках, длины которых стремятся к нулю.**

***Теорема 2.*** *Для всякой системы вложенных отрезков* ***[an,bn]*** *длины которых стремятся к нулю, существует единственная точка* ***ξ*** *принадлежащая всем отрезкам данной системы, при этом* ***ξ = sup{an} = inf{bn}.***

*Доказательство:* В силу данной теоремы хотя бы одна точка имеется. Покажем, что их не может быть больше одной. Пусть это не так, т.е. две **ξ**и **η** – общие для всех отрезков системы. Пусть **η< ξ,** т.е. **ε:= ξ*-*η>0.** По определению стягивающейся системы отрезков **∃n∈N: bn-an<ε** , тогда **an≤η<ξ≤bn**, отсюда **ξ-η≤ξ-an≤bn-an<ε**, что противоречит выбору **ε**.

**Вопрос 11. Множества равномощные, конечные и бесконечные, счетные. Примеры.**

Два множества **X** и **Y** между которыми можно установит взаимно однозначное соответствие (биекцию), **равномощными (эквивалентными)**, говорят, что они имеют одну и ту же мощность («одинаковое» количество элементов) (пишут **X~Y**).

Пример: **N~{2,4,6,8,10…}, N~Z,**

Множество Х называется **конечным,** если существует n, **X={1,2,…n}**.

Множество, не являющееся конечным является **бесконечным**.

Множество называется счетным если оно эквивалентно множеству натуральных чисел(**X~N**).

**Вопрос 12. Счетность множества рациональных чисел.**

***Теорема 1.*** *Множество рациональных чисел счетно.*

*Доказательство:* Распределим все рациональные числа в таблице содержащей бесконечное число строк и столбцов:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 | … |
| 1 | 0/1 | 1 | -1 | 2/1 | -2/1 | … |
| 2 | 0/2 | 1/2 | -1/2 | 1 | -1 | … |
| 3 | 0/3 | 1/3 | -1/3 | 2/3 | -2/3 | … |
| … | … | … | … | … | … | … |

Нумеруем все числа, кроме тех что уже встречались. В результате все рациональные числа оказываются занумерованными, т.е. множество Y рациональных чисел счетно.

**Вопрос 13. Несчетность множества действительных чисел.**

**(НЕ ЗНАЮ НАДО ИЛИ НЕТ) *Теорема 2.*** *Любой отрезок множества действительных чисел состоит из несчетного множества точек.*

*Доказательство:* Пусть это не так, тогда все точки отрезка **[a, b], a<b** можно пронумеровать, **[a, b]={x1,x2…}**. Выберем отрезок **[a1, b1]⊂[a, b]** не содержащий **х1**. Таким образом если выбрать отрезок **[an, bn]** то дальше выберем отрезок **[an+1, bn+1]**. Продолжая этот процесс получим систему вложенных отрезков **[an, bn]** такую что **xn** не принадлежит **[an, bn]**, следовательно ни одна точка не принадлежит пересечению **[an, bn]** но согласно принципу вложенных отрезков существует точка **ξ** принадлежащая всем отрезкам. Следовательно **ξ** принадлежит **[a, b].**

***Теорема 3.(Кантор).*** *Множество всех действительных чисел несчетно.*

Доказательство: Если бы множество всех действительных чисел было бы счетно, то было бы счетно любое его подмножество и любой отрезок что противоречит теореме счетности рациональных чисел(Т1) и несчетности любых отрезков(Т2).

**Вопрос 14. Определение предела числовой последовательности.**

**Предел числовой последовательности** – это число конечно или бесконечно удаленное от всех элементов этой последовательности и содержащее в своей окрестности все элементы этой последовательности, начиная с некоторого номера.

**Определение предела числовой последовательности:** Для любого ε>0 существует номер N, что все xn с номерами n>N расположены между a-ε и a+ε.

(a= ) - ∀ε>0 ∃N ∀n>N: |xn-a|<ε

**Вопрос 15. Бесконечно большие последовательности. Пределы и (a>1).**

Последовательность предел которой является **∞** со знаком или без, называется **бесконечно большой.**

Докажем что если **a>1,** то **=+∞ и =0.**

**α=а-1, α>0, an=(1+α)n>nα,**

**∀ε>0 ∃n0, n0 > , ∀n>n0,**

**an > nα > n0α > α = ; < ε**

а это по определению предела и означает справедливость равенств: **(1+α)n=1+ nα + α2+…+αn.**

**Вопрос 16. Единственность предела числовой последовательности.**

***Теорема 1.*** *Числовая последовательность может иметь* ***только 1 предел*** *конечный или бесконечный (определенного знака).*

*Доказательство:* Допустим противоположное, пусть существует **{xn}** что **limn→∞xn=a, limn→∞xn=b, a≠b, a∈, b∈**. Возьмем непересекающиеся окрестности **U=U(a)** и **V=V(b)** точек **a** и **b**.

Согласно определению предела, вне окрестности **U** точки **а**, в частности окрестности **V** точки **b**, содержится лишь конечное число членов последовательности **{xn}.** Однако точка **b** также является ее пределом и по этому в ее окрестности **V** должны находиться все члены последовательности **{xn}** начиная с некоторого номера, а следовательно бесконечно много ее членов, получается противоречие.

**Вопрос 17. Теорема о трех последовательностях.**

***Теорема 2.*** *Если* ***xn≤yn≤zn n=1,2…*** *(1), то* ***limn→∞xn= limn→∞zn=a∈*** *(2), то* ***limn→∞yn=a*** *(3).*

*Доказательство:* Зафиксируем произвольную окрестность **U(a)**, в силу (2) существует такой **∃n1**, что **n>n1, xn∈U(a)**, и **∃n2, n>n2, zn∈U(a)**, предположим, что **n0=max{n1,n2}**, тогда при **n>n0**, одновременно **xn∈U(a), zn∈U(a) ⇒ [xn, zn]⊂U(a)**, но **yn∈[xn, zn]** (см.1) так что при n>n0, пишут **yn∈U(a)**, это означает что **limn→∞yn=a.**

**Вопрос 18. Переход к пределу в неравенствах. Последовательности ограниченные и неограниченные.**

***Теорема 3 (о переходе к пределу в неравенстве)****. Если* ***limn→∞xn=a,  limn→∞yn=b, a∈, b∈*** *и для* ***∀n∈N, xn≥yn*** *то* ***⇒ a≥b.***

*Доказательство:* Если бы оказалось что **a<b**, то согласно Лемме 1, нашелся бы **∃n0** что для **∀n>n0** выполнялось бы неравенство **xn<yn** что против **xn≥yn.**

Числовая последовательность называется **ограниченной сверху (снизу)**, если множество ее значений ограниченно сверху (снизу).

Иначе говоря последовательность **{xn}** называется **ограниченной сверху (снизу),** если существует такое число **∃с∈R**, что для **∀n∈R** выполняется неравенство **xn≤c (xn≥c)**.

Последовательность ограниченная как сверху так и снизу называется **ограниченной**.

Последовательность не являющаяся ограниченной сверху (снизу), называется **неограниченной.**

**Вопрос 19. Ограниченность сходящихся числовых последовательностей.**

***Теорема.*** *Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.*

*Доказательство:* Пусть **limn→∞xn=a**, тогда согласно определению предела, существует **∃n0**, что для всех **∀n>n0, |xn-a|<1**(1) (в определении предела взяли **ε=1**). Обозначим через d наибольший из чисел **d=max{1, |xn-a|…|xn0-a|}** тогда в силу (1) для **∀n>N** имеем **a-d≤xn≤a+d**

**Вопрос 20. Бесконечно малые последовательности и их свойства.**

Числовая последовательность, предел которой равен нулю, называется **бесконечно малой**.

**Свойства б.м. последовательностей:**

1. *Любая конечная, линейная комбинация б.м. последовательностей является бесконечно малой.*

*Доказательство:* Пусть **{αn}** и **{βn}** б.м. последовательности a **λ** и **μ∈R**, **∀ε>0, c>|λ|+|μ|** тогда существует **∃n0**, что для любого ∀n>n0 выполняется неравенство **|αn|< , |βn|<** , отсюда **|λαn+μβn| ≤ |λ||αn|+|μ||βn| ≤ (|λ|+|μ|)**, a это означает что **λ{αn}+μ{βn}** бесконечно малая последовательность.

1. *Произведение бесконечно малых последовательностей на ограниченную последовательность является бесконечно малой.*

*Доказательство:* Пусть **limn→∞αn=0,** а **{xn}** ограниченная последовательность т.е. **с>0,** что для всех **∀n∈N** выполняется **|xn|≤c,** возьмем **∀ε≥0,** тогда по определению предела существует **∃n0**, что для всех **∀n>n0** выполняется неравенство **|αn|≤**  , при **n>n0,** **|αn⋅xn|=|αn||xn|< c=ε,** а это и означает что {**αn⋅xn**} бесконечно малая последовательность.

**Вопрос 21. Свойства пределов, связанные с арифметическими действиями над последовательностями (lim(xn+yn), lim(xnyn)).**

*2°. Конечная, линейная комбинация сходящихся последовательностей также является сходящейся последовательностью и ее предел равен такой же линейной комбинации предела данных последовательностей.*

*Доказательство:* **lim xn=a, lim yn=b, a и b∈R** тогда в силу леммы 1, **xn=a+αn, yn=b+βn**, где **{αn} {βn}**- б.м. Пусть **λ, μ∈R, λxn+μyn=λa+μb+λαn+μβn, n=1,2…** по свойству 1 §4 (любая конечная, линейная комбинация б.м. является б.м.), **{λαn+μβn}**- б.м. Поэтому в силу леммы 1, **limn→∞(λxn+μyn)=λa+μb.**

*3°. Если последовательности* ***{xn}*** *и* ***{yn}*** *сходятся, то их произведения также сходятся и их пределы* ***lim(xnyn)= lim xn⋅lim yn.***

*Доказательство:* Пусть **lim xn=a, lim yn=b**, тогда **xn=a+αn, yn=b+βn**, где **{αn}, {βn}** – б.м. поэтому **xnyn=(a+αn)(b+βn)=ab+(bαn+aβn+αnβn)=γm**, где **{γm}** – б.м.(см. св.1,2 §4)(1.любая конечная, линейная комбинация б.м. является б.м.; 2.Произведение б.м. последовательностей на ограниченную последовательность является б.м.). Отсюда из леммы 1 получаем предел **limn→∞xnyn=ab.**

**Вопрос 22. Предел частного lim(xn/yn).**

*Если последовательность* ***{xn}*** *и* ***{yn}*** *сходятся,* ***yn≠0*** *для* ***∀n∈N*** *и* ***limn→∞yn≠0****, то* ***{xn/yn}*** *сходится, причем* ***limn→∞xn/yn= limn→∞xn/limn→∞yn.***

***Доказательство:*** пусть **lim xn=a, lim yn=b,** тогда **xn=a+αn, yn=b+βn**, **αn** и **βn** – б.м.

**lim|yn|=|b|, 0<<|b|,** согласно лемме 1, существует **n0**, для любого **n>n0, |yn|>, (1).**

**- = - = (2).**

Здесь последовательностьограничена: **= <** (см. 1)

Поэтому последовательность является бесконечно малой как произведение ограниченной на бесконечно малую, отсюда из (2) следует требуемое.

**Вопрос 23. Теорема Вейерштрасса о монотонных последовательностях.**

***Теорема Вейерштрасса:*** *Всякая возрастающая числовая последовательность* ***{xn}*** *имеет предел: конечный если она ограниченна сверху или бесконечный если она не ограниченна сверху, причем* ***limn→∞{xn}=sup{xn}****(1), аналогично если* ***xn*** *убывающая последовательность то существует (конечный или бесконечный) предел* ***limn→∞xn=inf(xn)****.*

***Доказательство:*** Пусть **xn** ограничено сверху, **β=sup{xn}, β∈**. Возьмем произвольную окрестность U(β) в точке β и обозначим через β' ее левый конец.

Согласно определению верхней грани: **1) ∀n∈N, xn≤β'; 2) ∃n0∈N, xn0>β'**

Очевидно отсюда в силу возрастания последовательности **{xn}** следует, что для любого **∀n>n0**, **β'<xn0≤xn≤β**, так что при **n>n0** имеем **xn∈U(β)**, а это и означает что **β** является пределом последовательности **{xn}**.

Аналогично рассматривается случай ограниченности **{xn}** снизу.

**Вопрос 24. Число е. (е=2,718281828…).**

***Теорема:*** *Последовательность* ***{xn}=(1+)n, n=1,2…*** *строго возрастающая и имеет конечный предел.*

***Доказательство:*** *Применив формулу бинома Ньютона* *****,**получим:*

***xn=(1+)n=1+n+***

**е:=limn→∞(1+)n**

поскольку **2<xn<3, xn** возрастает, то **2<e≤3**

**Вопрос 25. Принцип компактности числовой прямой (теорема Больцано-Вейерштрасса). Случай неограниченных последовательностей.**

***Теорема (Больцано-Вейерштрасса):*** *Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

***Доказательство.***Пусть последавательность лежит на **[*a,b*]⊃ {*xn*}***.*

Разделим отрезок **[*a,b*]** пополам, обозначим **[*a*1*,b*1]** тот из полученных двух отрезков, который содержит бесконечно много членов последовательности **{*xn*}***.* Возьмем какой-нибудь член последовательности, лежащий в **[*a*1*,b*1]**, его индекс обозначим ***n*1**. Разделим отрезок **[*a*1*,b*1]** пополам, обозначим через **[*a*2*,b*2]** тот из полученных двух отрезков, который содержит бесконечно много членов последовательности **{*xn*}***.* Возьмем какой-нибудь член последовательности, лежащий в **[*a*2*,b*2]** и имеющий индекс больший, чем ***n*1**, его индекс обозначим ***n*2**. Продолжая этот процесс, мы построим подпоследовательность **.** Система отрезков **[*ak,bk*]**представляет собой систему вложенных, стягивающихся к нулю отрезков **(*bk-ak=*(*b-a*)/2*k*)**. Общую точку обозначим ***c****.* Так как ***c∈*[*ak,bk*]***,* то ****. Откуда следует, что ****.

Пусть теперь последовательность **{xn}** неограниченна сверху тогда **∃** такой номер **n1**, что **xn1>1**, то последовательность **xn1+2** также неограниченна, то найдется номер **n2>n1**, что **xn2>2**, продолжая этот процесс получим, что **n1<n2<n3<…<nk, xnk>x, k=1,2…** из последовательности вытекает **lim{xnk}=+∞**.

**Вопрос 26. Частичные, верхний и нижний пределы последовательности. Теорема о существовании наибольшего и наименьшего частичного предела.**

Предел подпоследовательности называется частичным пределом.

Наибольший частичный предел последовательности {xn} называется ее **верхним пределом**, , где **X**– множество всех частичных пределов. Аналогично, определяется **нижний предел** .

***Теорема.*** *У любой последовательности существует как верхний, так и нижний пределы.*

***Доказательство:*** Докажем существование наибольшего частичного предела, для заданной последовательности **{xn}** возможны два случая: 1) либо ограничена сверху, 2) либо нет.

Если неограниченна сверху, то **+∞** является ее частичным пределом и очевидно наибольшим, т.е. **n→∞=+∞**. Если же **{xn}** ограниченна сверху, то возможны два случая: либо множество ее конечных частичных пределов, которое мы обозначим через **А** не пусто, либо оно пустое.

Рассмотрим **А≠∅**. Из ограниченной сверху данной последовательности **{xn} ⇒** ограниченность множества **А** в силу этого множество **А** имеет конечную точную верхнюю грань. Покажем, что **β=supA** является частичным пределом, т.е. **β∈А**. Действительно, если бы **β∉А**, то **∃** бы такое **ε>0**, что в интервале **(β-ε; β+ε)** содержалось бы лишь конечное число членов и поэтому в этом интервале не было бы ни одного элемента , что противоречит условию .

Таким образом и следовательно является наибольшим элементом ).

В оставшемся случае, т.е. когда последовательность ограниченна сверху и множество ее конечных частичных пределов пусто то **(xn)n→∞=-∞**.

Доказательство: В этом случае множество ее частичных пределов состоит из единственного элемента **-∞**, тем самым **-∞** является наибольшим в этом множестве.

Аналогично доказывается для нижнего предела.

**Вопрос 27. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.**

Числовая последовательность **{xn}** называется **фундаментальной** если, для ∀ε > 0 существует ∃n0 что для ∀n > n0 для любого целого ∀p:|xn+p - xn|<ε (условие Коши).

Теорема. (Критерий Коши). Для того, чтобы последовательность {xn} сходилась необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальна.

Доказательство: Необходимость. Последовательность сходится . Пусть ε >0 . Для ε′=ε/2∃ n0∀n> n0:|xn -a|<ε/2 для тех же n (n> n0) и ∀p будет выполнено |xn+p -a|< ε/2. Таким образом, для ∀n> n0∀p:|xn+p - xn|≤ |xn+p - a|+|a - xn| < ε/2+ε/2=ε.

Если же последовательность удовлетворяет условию Коши, т.е. является фундаментальной, то согласно лемме 1 (если последовательность имеет конечный предел, то она фундаментальная), она ограничена, следовательно в силу принципа компактности из нее можно выбрать подпоследовательность имеющую конечный предел. Тогда из леммы 3 (если некоторая подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то ее предел и является пределом всей последовательности), следует что вся заданная последовательность сходится к тому же пределу.

Вопрос 28. Понятие точной верхней и нижней грани функции, ее наименьшего и наибольшего значения на множестве Е.

**Точная верхняя(нижняя)** грань множества значений функции **f(E), f:E→R**, называется **точной верхней(нижней)** гранью функции и обозначается **sup (f), (inf (f))**.

Говорят что **f:E→R** принимает в точке **x0∈Е** **наибольшее значение (наименьшее значение)** если **f(x)≤f(x0) (f(x)≥f(x0))**, в таких случаях пишут **f(x0)=max f(x) (f(x0)=min f(x))**.

**Вопрос 29. Определение предела функции по Коши. Односторонние пределы функции в точке.**

**Определение предела функции по Коши –** точка **А** называется пределом функции **f** точки **а**, если для любой окрестности **U(A,ε)** точки **А** существует такая проколотая окрестность **(a,δ)** точки **а,** что **f((a,δ))⊂f(U(A,ε)),** при этом пишут **limx→af(x)=A.**

Пусть **f(x)** определена в правой (левой) полуокрестности точки **a∈R**, точка **А** называется **пределом справа (слева)**, если **∀ε>0 ∃δ(ε)>0**, что для всех **∀x∈U(a+0,δ):={x: a<x<a+δ}**

**(∀x∈U(a-0,δ):={x: a-δ<x<a})** при этом пишут **A=limx→a+0f(x)=f(a+0)** – правосторонний предел, **A=limx→a-0f(x)=f(a-0)** – левосторонний предел.

**Вопрос 30. Определение предела функции по Гейне. Эквивалентность двух определений функции.**

**Определение предела функции по Гейне –** пусть **f(x)** определена в проколотой окрестности **(a)** точки **а,** точка А называется пределом функции в точке **а**, если для **∀** последовательности **{xn}∈(a) n=1,2…** такой, что **limn→∞xn→a**, имеет место **limn→∞f(xn)=A или limx→af(x)=A**.

***Теорема.*** *Определения пределов функции по Коши и по Гейне равносильны.*

***Доказательство.*** Пусть **limx→af(x)=A** по Коши, пусть **{xn}** последовательность типа Гейне при **x→a***,* тогда для любой окрестности **U(A)** в точке **А**, найдется проколотая окрестность **(a)** в точке **а** такая, что **∀x∈(a)** имеем **f(x)∈U(A)**, если **limn→∞(xn)=a**, то найдется номер **∃N, ∀n>N, xn∈(a), f(xn)∈U(A)**. На основании определения предела последовательности заключаем, что **limn→∞f(xn)=A.**

***Обратное.*** Пусть предел **limx→af(x)=A (**по Гейне**),** если **А** не является пределом **f(x)** при **x→a** в смысле определения от **х,** то найдется **∃U(A)** такая что при **∀n∈N** проколотом **1/n** окрестности точки **А** найдется **∃xn** такая что **f(xn)∉U(A),** но это означает что **А** не является пределом последовательности **f(xn)** хотя предел **limn→∞f(xn)→a.**

**Вопрос 31. Критерий коши существования предела функции.**

***Теорема (Коши)***. *Для того чтобы* ***f*** *имела в точке* ***а∈*** *конечный предел необходимо и достаточно чтобы для* ***∀ε>0*** *существовала* ***∃(a)=(a,δ)*** *точки* ***а****, чтоб для любых* ***∀x′,x″∈(a)*** *выполнялось бы неравенство* ***|f(x′)-f(x″)|<ε*** *(1).*

***Доказательство.***

***Необходимо.*** Пусть предел **limx→af(x)=A∈R**, тогда для **∀ε>0** существует **∃(a)** такая, что для **∀x∈(a)** выполняется неравенство **|f(x)-A|<** , так что для **∀x′,x″∈(a)** выполняется

**|f(x′)-f(x″)|≤|f(x′)-A|+|f(x″)+A|<= ε.**

***Достаточно.*** Пусть **ε>0** и **(a)** такая окрестность, что для **∀x′,x″∈(a)** выполняется неравенство (1). Возьмем, какую либо последовательность {**xn}, xn≠a, limn→∞xn=a**, в силу определения предела последовательности **∃n0**, что для **∀n>n0, xn∈(a)** от суда и следует, что **|f(x′)-f(x″)|<ε**.

Это означает, что последовательность **{f(xn)}** удовлетворяет критерию сходимости Коши для последовательностей и следовательно имеет конечный предел, от сюда и из определения предела по Гейне следует что **f** имеет в точке **а** конечный предел.

**Вопрос 32. Свойства пределов функций (локальная ограниченность, сохранение знака, переход к пределу в неравенствах; свойства, связанные с арифметическими действиями над функциями).**

1. **Локальная ограниченность.** Если у функции заданной точки ∃ конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности этой точки а ограниченна.

**Доказательство.** Пусть **limx→af(x)=A**, тогда для **∀ε>0**, в частности для **ε=1, ∃(a,δ)** в точке **а**, такая что для **∀x∈(a,δ)** имеет место **f(x)∈U(A,1)** т.е. **A-1<f(x)<A+1.**

1. **Сохранение знака.** Если у **f** заданной точки **а ∃** конечный предел **limx→af(x)=A≠0,** то в некоторой окрестности **(a), f** имеет тот же знак что и указанный предел.

**Доказательство.** Пусть **limx→af(x)=A, A>0** тогда для **∀ε>0,** в частности для **ε=А, ∃(a,δ)** такая что для **∀x∈(a,δ)** имеем **f(x)∈(A,A)** т.е. **А-А<f(x)<A+A,** так что **f(x)>0.**

1. **Переход к пределу в неравенствах. *Теорема.*** *Если* ***f*(*x*)*, g*(*x*)** *определены на* ******,***x*0*∈*(*a,b*) *и f*(*x*)*< g*(*x*)** *на  и существуют пределы,* ***А*** *и* ***B*** *числа, то* ***A*<*B****.*

Арифметические действия:

1), , если ∃.

2) , если существуют конечные пределы , .

3) , если существуют конечные пределы , .

4) ∃⇒∃

5) g(*x*)≠0,, ∃⇒∃

*Следствие:* , если существует конечный предел .

**Вопрос 33. Теорема о сложной функции.**

***Теорема.*** *Пусть* ***∃*** *конечный или бесконечный* ***limx→af(x)=b, limy→bF(y)*** *и пусть при этом в некоторой* ***Ů(a)*** *точки* ***а, f(x)≠0,*** *тогда в некоторой* ***Ů(a,δ0)*** *определена сложная функция* ***F(f(x))*** *и* ***∃ limx→aF(f(x))=limy→bF(y).***

***Доказательство.*** Пусть функция **F(y)** определена в некоторой **Ů(b,ε0),** поскольку **limx→af(x)=b,** то при некоторой **δ0>0** имеем **f(Ů(a,δ0))**⊂**Ů(b,ε0) и Ů(a,δ0)⊂ Ů(a).**

Таким образом в окрестности **Ů(a,δ0)** определена функция **F(f(x)).**

Пусть теперь последовательность **xn∈ Ů(a,δ0), xn→a.** Положим **yn=f(xn),** очевидно **yn∈Ů(b,ε0)** при этом согласно определению предела функции по Гейне**, limn→∞yn=b,** из существования пределов **limy→bF(y)=:A** следует что **∃limn→∞F(yn)= limn→∞F(f(xn))=A, а это и означает что limF(f(x))=A.**

**Вопрос 34. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и связь между ними.**

Функция **α(x)** называется бесконечно малой **(**при **x→a)** если **limx→aα(x)=0.**

Функция **α(x)** называется бесконечно большой **(**при **x→a)** если **limx→aα(x)=∞.**

***Теорема 2.*** *Функция* ***α(x)*** *неравная нулю в некоторой проколотой окрестности* ***Ů(a)*** *является бесконечно малой* ***(при x→a)*** *тогда и только тогда когда* ***1/α(x)*** *является бесконечно большой* ***(****при* ***x→a).***

**Вопрос 35. Теорема о существовании односторонних пределов у монотонной функции.**

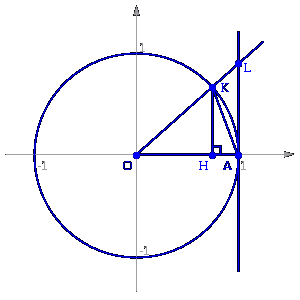
***Теорема.*** *Пусть* ***f*** *возрастает на конечном или бесконечном интервале* ***(a,b)****, тогда в точке* ***x=b, limx→b-0f(x)=sup(a,b)f(x)****, а в точке* ***x=a, limx→a+0f(x)=inf(a,b)f(x).***

**Следствие.** Если функция монотонна на **(a,b)** тогда **x0∈(a,b)** то в точке **x0** существуют конечные, односторонние пределы: **f(x0-0), f(x0+0)**.

***Доказательство.*** Пусть **β:=sup(a,b)f(x)∈**, зададим произвольную окрестность **U(β)** точки **β** и пусть **β'**-левый ее конец, **β'<β**. Тогда существует такая точка **ξ∈(a,b)**, что **f(ξ)>β'**. Положим **(b):=(ξ,b)**, тогда для **∀x∈(b)** в силу возрастания функции**, β'<f(ξ)≤f(x)≤β т.е. f(x)∈U(β)**.

Итак для **∀U(β)** существует такая проколотая левосторонняя **(а,b)**, что для **∀x∈(а,b)** имеем **f(x)∈(b)** это и означает что **limx→b-0f(x)=sup(a,b)f(x)**.

Аналогично для **limx→а+0f(x)=inf(a,b)f(x)**.

**Вопрос 36. Предел limx→0.**

***limx→0=1.***

***Доказательство.*** Рассмотрим односторонние пределы **limx→0+** и **limx→0-** и докажем, что они равны 1**.**

Пусть **x∈(0;).** Отложим этот угол на единичной окружности **(R=1)**. Точка **K** — точка пересечения луча с окружностью, а точка **L** — с касательной к единичной окружности в точке (1;0). Точка **H** — проекция точки **K** на ось **OX**. Очевидно, что: **SΔOKA<SsectOKA<SΔOAL** (1).

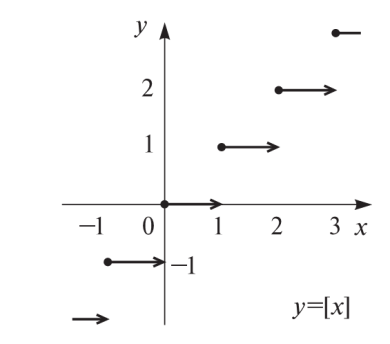




(из **ΔOAL**:**| LA | = tgx**); Подставляя в (1), получим:

или **sin(x)<x<tg(x)**. Разделив все части неравенства на **sin** **x > 0**, получим при условии **х > 0**:

 или . Так как функция у = cos x непрерывна, то . Пользуясь теоремой о пределе промежуточной функции(о двух милиционерах), получим .

**Вопрос 37. Непрерывность функции в точке. Односторонняя непрерывность функции в точке. Примеры.**

Функция определенная в некоторой окрестности точки **а**, называется **непрерывной в этой точке** если **limx→af(x)=f(a)**.

Пусть функция определена на полуинтервале **(a,x0]** (**[x0,a)**)**,** функция называется **непрерывной слева (справа)** в точке **х0** если **limx→x-0f(x)=f(x0) (limx→x+0f(x)=f(x0)).**

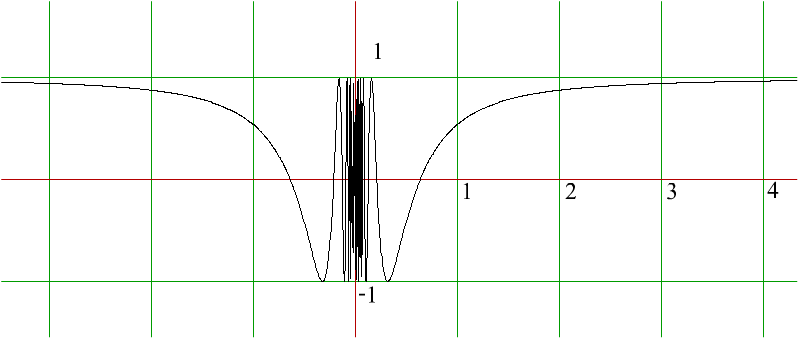
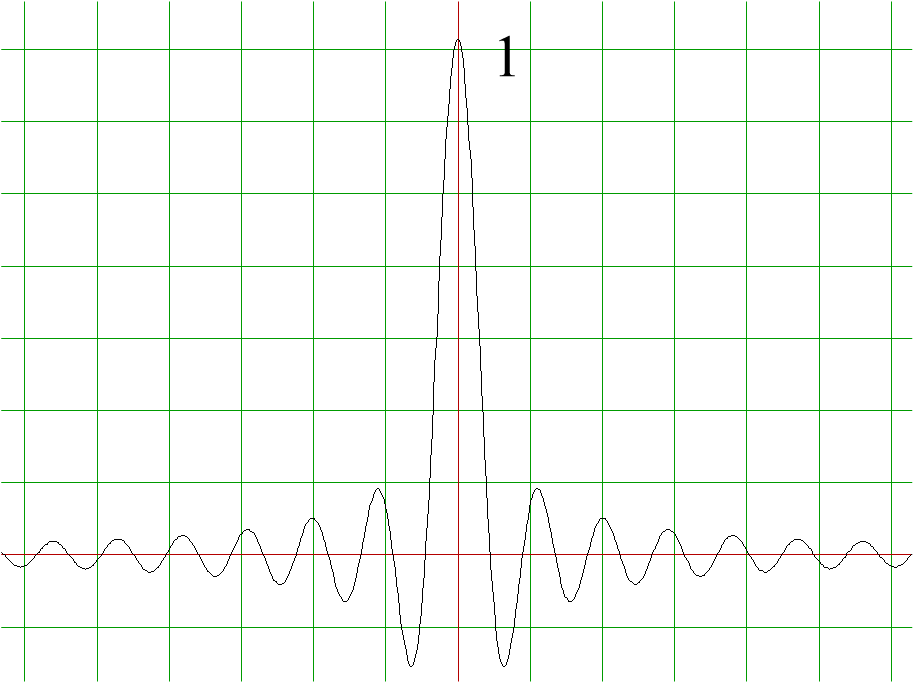
**Пример. f(x)=[x] –** наибольшее целое число, меньшее или равное **х.**

**f(x)=[x]** непрерывна справа во всех точках **х.**

**Вопрос 38. Точки разрыва первого и второго рода. Примеры.**

Если **f:(a,b)→R** не является непрерывной в некоторой точке **x0∈(a,b)** и имеются конечные пределы справа и слева **f(x0+0)=limx→x0+0f(x), f(x0-0)=limx→x0-0f(x)**, то эта точка называется **точкой разрыва первого рода**.

Если **f:(a,b)→R** не является непрерывной в некоторой точке **x0∈(a,b)** и имеется конечный предел либо справа **f(x0+0)=limx→x0+0f(x)**, либо слева **f(x0-0)=limx→x0-0f(x)** или оба отсутствуют, то такая точка называется **точкой разрыва второго рода.**

**Пример**. Пример 1. Функция  имеет устранимый разрыв первого рода в точке .

Пример 2. [Функция ](http://www.kaf30.mephi.ru/books/ILL/slide41.swf) имеет разрыв второго рода в точке 

**Вопрос 39. Локальные свойства функций, непрерывных в точке (теорема о локальной ограниченности, теорема о сохранении знака, теорема о непрерывности суммы, произведения, частного, теорема о непрерывности композиции двух непрерывных функций).**

***Теорема 1. f:(a,b)→R*** *функция непрерывна в точке* ***x0∈(a,b),*** *тогда справедливы следующие утверждения****:***

1. **f** ограничена в некоторой окрестности **U(x0)** точки **х0.**
2. Если **f(x0)≠0,** то в некоторой окрестности **U(x0)** точки **х0** все значения функции положительные или отрицательные т.е. **sign f(x)=sign f(x0).**

**Доказательство случая 2.** Непрерывность в точке х0, в частности обозначает, что f определена некоторой окрестности точки **х0.** Пусть для определенности, **f(x0)=d>0.** Возьмем **ε= >0.** Тогда по определению непрерывности **∃δ>0: |f(x)-f(x0)|<ε=, ∀x:|x-x0|<δ,** откуда следует, что **f(x)=f(x0)+(f(x)-f(x0))>d- =,** при **x∈Uδ(x0).**

***Теорема 2.*** *Если функции* ***f*** *и* ***g*** *непрерывны в точке* ***х0,*** *то функции* ***сf, f+g, fg,*** *а также при условии* ***g(x0)≠0,*** *непрерывны в точке* ***х0. Докажем*** *лишь что* ***f/g*** *непрерывна в* ***х0*** *(для остальных аналогично).* ***g(x)≠0*** *при* ***x∈U(x0)*** *и частное* ***f/g*** *определено на* ***U(x0)****. Используя свойства пределов и непрерывность* ***f*** *и* ***g****:* ***limx→x0(f/g)(x)= limx→x0f(x)/g(x)= limx→x0f(x)/ limx→x0g(x)=f(x0)/g(x0)=(f/g)(x0)****.*

***Теорема 3.*** *Пусть функция* ***y=f(x)*** *непрерывна в точке* ***х0,*** *а функция* ***F(y)*** *непрерывна в точке* ***y0=f(x0),*** *тогда композиция* ***(Fοf)(x):=F(f(x))*** *непрерывна в точке* ***х0.***

Это утверждение является следствием теоремы по пределу сложных функций, в силу которой **limx→x0F(f(x))=limy→y0F(y)=F(y0)=F(f(x0)),** что равносильно суперпозиции в точке **х0.**

**Вопрос 40. Теорема Больцано-Вейерштрасса о промежуточном значении непрерывной функции.**

***Теорема (Больцано-Вейерштрасса).*** *Если* ***f*** *непрерывная на отрезке* ***[a,b] (f∈c[a,b]), f(a)=A****,* ***f(b)=B****, то для* ***∀С*** *заключенного между* ***А*** *и* ***В****, существует такая точка* ***ξ∈[a,b]****, что* ***f(ξ)=С****.*

**Доказательство.** Пусть для определенности **f(a)=A<B=f(b)** и **A<С<B**. Разделим отрезок **[a,b]** точкой **х0** пополам, тогда либо **f(x0)=C**, значит искомая точка **ξ=х0**, либо **f(x0)≠C**, тогда на концах одного из полученных отрезков **f** принимает значения лежащие по разные стороны от числа **С**. Обозначим этот отрезок через **[a1b1]** и разделим на пополам и т.д. В результате либо через конечное число шагов придем к искомой точке **ξ** (т.е. **f(ξ)=С**), либо получим последовательность вложенных отрезков **[an,bn], bn-an→0** при **n→∞**, и таких что **f(an)<C<f(bn)** (1).

Пусть **ξ** – общая точка всех этих отрезков, мы знаем что ξ=limn→∞an=limn→∞bn, поэтому в силу непрерывности функции f(ξ): =limn→∞f(an)= limn→∞f(bn) переходя в неравенстве (1) к пределу при n→∞, получим f(ξ)=C.

**Вопрос 41. Теорема Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной на отрезке, и о достижении ею своих точных верхних и нижних граней.**

***Теорема (Вейерштрасса) о максимальном значении.*** *Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на нем своей точной верхней и нижней грани.*

***Доказательство.*** Пусть **M=supx∈[a,b]f(x)**, **M∈**, по свойству точной верхней грани, для **∀n∈N** найдется **∃x=xn∈[a,b]**, **f(xn)∈U(M,)** (1). Из последовательности **{xn}** по теореме Больцана-Вейерштрасса можно извлечь сходящуюся подпоследовательность **{xnk}, xnk→x0 при k→∞, limk→∞f(xnk)=f(x0)** (2) в тоже время в силу (1) для **∀k∈N** имеем **yk:=f(xnk)∈U(M,εk), где εk= ↓0**, это означает что **limk→∞yk≡ limk→∞f(xnk)=M** отсюда и из (2) получаем **M=f(x0)**, что и требовалось доказать. Аналогично для **f** ограниченной снизу и достигающей своей точной нижней грани.

**Вопрос 42. Теорема о мощности множества точек разрыва монотонной функции.**

***Теорема.*** *Множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно (т.е. либо конечно, либо счетно).*

***Доказательство****.* Каждой точкой разрыва функции свяжем интервалы не содержащие значения функций, эти интервалы не пересекаются, но на прямой может быть не более чем счетное множество непересекающихся интервалов. Действительно в каждом из них можно выбрать по рациональной точке, и тогда множество интервалов окажется **~** подмножеству счетного множества рациональных чисел. Значит оно само не более чем счетно. Вместе с ним не более чем счетно и множество точек разрыва монотонной функции.

**Вопрос 43. Критерий непрерывности монотонной функции.**

***Теорема****. Функция* ***f:[a,b]→R*** *, монотонная на* ***[a,b]****, непрерывная на нем тогда и только тогда когда множество* ***f([a,b])*** *ее значений само является отрезком с концами* ***f(a)*** *и* ***f(b)****.*

***Доказательство.*** Пусть **f** – непрерывная, монотонная функция, ввиду монотонности все ее значения **f(x)**, **x∈[a,b]**, лежат между **f(a)** и **f(b)**. Ввиду непрерывности **f** обязана принимать также и все промежутки между **f(a)** и **f(b)** значения. Таким образом **f([a,b])** есть отрезок с концами **f(a)** и **f(b)**.

**Обратное.** Пусть **f** монотонна на **[a,b]**, если **f** разрывна в некоторой точке **x0**, то по сл.1 **∃** интервал не содержащий значений функции **f**, но содержащийся в силу монотонности в отрезке с концами **f(a)** и **f(b)**, возникло противоречие, с тем что по условию **f([a,b])** это отрезок с концами **f(a)** и **f(b)**.

**Вопрос 44. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции для строго монотонной непрерывной функции. Примеры.**

***Теорема****. Пусть* ***f:X→R*** *строго монотонная и непрерывная на* ***X=[a,b]*** *тогда обратная функция* ***f-1*** *определена, строго монотонная и непрерывная на отрезке с концами в точках* ***f(a)*** *и* ***f(b)******([f(a),f(b)]).***

***Доказательство.*** Существование обратной функции следует из строгой монотонности. Кроме того, обратная функция также будет монотонной с областью значений **[*a,b*]***.* Из критерия непрерывности монотонной функции следует ее непрерывность ( монот. функция будет непрерывна на **[*a,b*]** тогда и только тогда когда множество ***f([a,b])*** ее значений само является отрезком с концами **f(a)** и **f(b)**).

y

x

y

x

a

b

f(b)

f(a)

f(a)

f(b)

b

a

**Вопрос 45. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.**

Функция **f:Е→R** называется **равномерно непрерывной** на множестве **Е** если для **∀ε>0** найдется **∃δ>0**, такое что для **∀x1,x2∈E,** таких что **|x1-x2|<δ**, выполнено **|f(x1)-f(x2)|<ε**.

***Теорема (Кантор)****. Функция непрерывная на отрезке [a,b] равномерно непрерывна на этом отрезке.*

***Доказательство****.* Предположим противное **∃ε0>0** такое что для **∀δ>0**, найдется **x',x″∈[a,b]**, **|x'-x″|<δ**, но при этом **|f(x')-f(x″)|≥ε0**. Возьмем **{δn}, δn→0** при **n→∞**, тогда найдутся значения **x'n, x″n∈[a,b]**, такие что **|x'n-x″n|<δn**, тогда как **|f(x'n)-f(x″n)|≥ε0**, по теореме (Больцано-Вейерштраса) из ограниченной последовательности **{x'n}** можно извлечь сходящуюся подпоследовательность **{x'nk}, x'nk→0**, при **k→∞** т.к. **|x'nk-x″nk|<δnk**, то **x″nk** также сходится к **x0**, **k→∞**. Поэтому ввиду непрерывности функции в точке **х0**, переход к пределу в неравенство **|f(x'nk)-f(x″nk)|≥ε0** даст **0=|f(x0)-f(x0)|≥ε0 (ε0>0)**, что противоречит. (в этом доказательстве **x0∈δn, limδn=x0**)

**Вопрос 46. Определение показательной функции на основе теории предела. Корректность определения.**

**Определение показ. функции.** Пусть **a>0,∀x∈R,rn→x, n→∞, rn∈Q**,положим **ax:=limn→∞arn** (1)

**Утверждение:** определение корректно, т.е. предел (1) существует и не зависит от выбора **{rn}**.

Доказательство. Пусть **rn→x**, покажем что **{arn}** является фундаментальной. Имеем **|arn-arm|=arm|arn-rm-1|** (2). Последовательность **{rn}** сходится и следовательно ограниченна. При этом очевидно **∃A∈Q**, при этом всем номерам **n∈N**, выполняется **–А<rn<A**, отсюда при **а≥1** имеем **a-A≤arn≤aA**. Поэтому при **∀а>0 ∃B** такое что **arn≤В** (3) для **∀n∈N** (**B=aA**, при **a>1**; **B=a-A**, при **a<1**).

По лемме 2 **∀ε>0 ∃δ=δ(ε)>0**, такое что для **∀r∈Q**, **|r|<δ** выполняется **|ar-1|<** (4). Из сходимости **{rn}** что для найденного **δ ∃nδ**, такое что для всех номеров **n>nδ; m>nδ, |rn-rm|<δ**, поэтому в силу (2)(3)(4) **|arn-arm|<B=ε**. В силу критерия Коши последовательность **{arn}** сходится.

Пусть теперь **{r′n}→x, r′n∈Q**, покажем что **limn→∞arn = limn→∞ar′n,** составим новую последовательность **{r″n}={r1, r′1, r2, r′2…rn, r′n}** очевидно **r″n→x**, поэтому в силу доказанного **∃ lim ar″n** , отсюда для ее последовательности имеем **limn→∞arn= limn→∞ar′n= limn→∞ar″n**

**Вопрос 47. Свойства показательной функции (пять свойств).**

1. a>1, ax ↑↑(строго возрастает) на R; a<1, ax↓↓ на R.
2. axay=ax+y, x,y∈R.
3. (ax)y=axy.
4. Функция ax непрерывна на R.
5. Множеством значений ax является множество R+=(0;+∞).

***Доказательства:***

1. Пусть для определенности **a>1, x<y**. **∃** такие иррац. числа **r′, r″**, такие что **x<r′<r″<y**, выберем какие либо посл-ти иррациональных чисел **{r′n}, {r″n}, r′n<r′<r″<r″n** для **∀** номеров **n∈N** и что **r′n→x, r″n→y** при **n→∞**, тогда **ar′n< ar′<ar″< ar″n**, перейдя к пределу при **n→∞** получим **ax< ar′<ar″< ay**. В случай **a<1** рассм. аналогично.
2. Пусть **r′n→x, r″n→y, r′n,r″n∈Q**, значит **r′n+r″n→x+y**, тогда в силу опред. показ. ф-ции **ax+y=limn→∞ar′n+r″n= limn→∞ar′n⋅limn→∞ar″n=axay**. Отметим, что из того что **axa-x=a0=1** следует равенство **a-x=**, отсюда же с учетом монот. **ax** (либо **ax>1**, либо **a-x>1**), ⇒ **ax>0**, для **∀x∈R**.
3. Поверим в начале, что свойство 3 имеет место при ∀ иррац. **y**. Если **y=m∈N**, то **(ax)m=ax⋅…⋅ax=ax+…+x=axm**; если **y=** , **n∈N** то **(ax)1/n=ax/n** т.к. по доказанному **(ax/n)n=ax**; если **y=, m,n∈N**, то **(ax)-m/n=== a-xm/n**. Пусть задана **у∈R**, рассм. произведение посл. **rn** рац. чисел сходящ. к **у** **(rn→y)** тогда **(ax)rn=axrn**, переходя в этом равенстве к пределу пользуясь определением показ. ф-ции и ее непрерывн. получим **(ax)y=axy**.
4. Для **∀ε>0 ∃δ>0**, что для **∀h∈R** таких что **|h|<δ**, вып. нер-во **|an-1|<ε**. Пусть х фиксир., **y=ax**, **∆y=ax+∆x-ax=ax(a∆x-1)**. Согласно сказанному для **∀ε>0 ∃δ>0** что для **∀∆х**, таких что **|∆х|<δ**, выполн. нер-во **|a∆x-1|<ε/ax** отсюда при **|∆х|<δ** имеем **|∆y|=ax|a∆x-1|<ε**, что обознач. непрерывн. ф-ции **ах** в точке **х**.
5. При **a>1** в силу непрер. и возр. ф-ции **y=ax** достаточно показать что **limх→+∞aх=-∞, limх→-∞aх=0,** поскольку пределы (кон. или бескон.) существуют, для этого дост. заметить что для **n∈N, limх→∞an=+∞, limх→∞a-n =0, при a<1, b=1/a>1, limх→+∞aх=limх→+∞1/x=0, limх→-∞aх=limх→-∞1/b=+∞.**

**Вопрос 48. Определение логарифмической и степенной функции и их свойства.**

Отобр-е обратное к **x→ax** назыв. **логарифм. ф-цией** по основанию **а (a>0, a≠1)** и обозн. **loga:R+→R.**

1. **logay1<logay2⇔ y1<y2**, если **a>1; logay1>logay2⇔ y1>y2**, если **0<a<1.**
2. **loga(y1y2)=logay1+logay2.**
3. **loga(bα)=αlogab.**
4. **logay**, непр. на **R+** и мн-во ее значений явл. **R**.

Ф-я **x→xα** опред. на мн-ве **R+** назыв. **степенной ф-цией,** а число **α** назыв. показ-ем степени.

Степенная ф-я явл. композиц. показат. и логарифм. ф-й: **xα= alogax^α =aαlogax**

**Вопрос 50. Сравнение функций (эквивалентные функции, «О» символика). Основные соотношения эквивалентности между элементарными функциями.**

Если между ф-ями **f** и **g** некоторой прокол. окр.выполнено соотн. **f(x)=γ(x)g(x), limx→x0γ(x)=1** то говорят что **f эквив. g** при **x→x0** и пишут **f(x)~g(x), x→x0**.

Если для двух ф-й f и g сущ. прокол. окр.  **и с>0, что для ∀x∈ вып. нер-во |f(x)|≤c|g(x)| то пишем f(x)=O(g(x)), x→x0 в частн. f(x)=O(1).**

**Основные соотношения эквивалентности между элементарными функциями: ~ x2, x→0; 2) ~; 3) x ~ sin x ~ tg x ~ ln(1+x) ~ex-1, х→0; 4) x ~ arcsin x ~ arctg x, х→0**